数理解析研究所講究録
1080巻 1999年 12-18

co-approximant(余近似子)について

無所属(長池荘研) 加藤佳宣 (Yoshinobu Kato)

co-approximation(余近似)の概念は、初めHilbert空間に対して

C. Franchetti and M. Furi, Some characteristic properties of real Hilbert spaces, Rev. Roum. Math. Pure Appl., (7) 17 (1972), 1045-1048.

により、名づけられないままに導入されたが、その後近似論(norm空間内などでの)の世界ではかなりよく知られた概念になっているようである。しかしながらこの概念を作用素論の中で考察したものは、知る限り、見掛けない。本小文ではそうした考察を試み、この概念に対する幾分かの関心を作用素論の中に呼び起こしてみたい。(成功の自信はないが。)

さて、余近似に必然的に付随する概念は余近似子(co-approximant)である。先の論文にそれが現れていないのは、Hilbert 空間内では通常の近似子(approximant)と一致するせいであるが、一般のnorm空間においては両者は決定的に異なり、

顕著なふるまいの差を見せることになる。

定義. $\mathfrak{M}$をnorm空間$\mathfrak{X}$の部分空間としたとき、$K_0 \in \mathfrak{M}$が

(i) $T \in \mathfrak{X}$の$\mathfrak{M}$近似子($\mathfrak{M}$-approximant)であるとは、

$\|T - K_0\| \leqq \|T - K\| \quad (K \in \mathfrak{M})$ が成立していること。

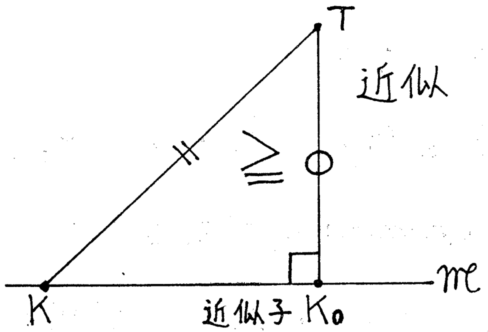
(ii) $T \in \mathfrak{X}$の$\mathfrak{M}$余近似子($\mathfrak{M}$-coapproximant)であるとは、

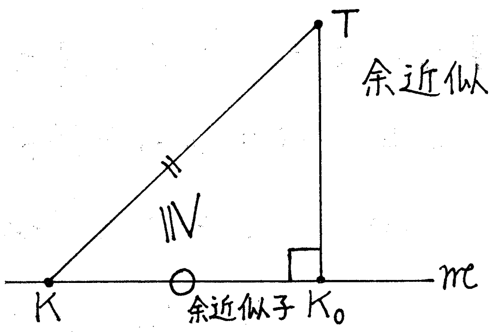
$\|K - K_0\| \leqq \|T - K\| \quad (K \in \mathfrak{M})$ が成立していること。

(注) 余近似子の概念がまともな意味を持つためには、少なくとも$\mathfrak{M}$が凸性を持つ必要が有る訳で、ここでは簡単のため部分空間と仮定しておいた。 また定義には$\mathfrak{X}$の完備性を要求しないが、現実にはBanach空間で考察しているものが多いようである。 もっとも$\mathfrak{X}$がBanach空間であっても、余近似子の一意性や存在性が保証される訳ではない。

"co-approximation"は "coapproximation"と表記されることが少なくないようである。

近似子と余近似子の「双対的」な差異は、次頁の図のように、James-Birkhoff直交性の直観的なイメージで考えると判りやすいかも知れない。 これは結局、直角三角形では斜辺が他の辺より必ず長い、ということである。





ここから作用素論の話になる。 $\mathcal{H}$を可分無限次元(複素)Hilbert空間とし、$\mathcal{H}$上の有界線形作用素全体の成す(通常normでの)norm空間を$B(\mathcal{H})$と記すことにする。 そして$\mathcal{X}$を以下、$B(\mathcal{H})$に限定して考察していく。 すると$\mathcal{M}$として($B(\mathcal{H})$の部分空間として)手始めに思いつくものは、大体、$\mathcal{C}(\mathcal{H})$($\mathcal{H}$上のcompact作用素全体…$K(\mathcal{H})$は避けた)、$\mathcal{S}$($\mathcal{H}$上の有界なselfadjoint作用素全体…これは実係数部分空間にしかならないが差し支えない)、$\mathbb{C}$(scalar全体…正確には$\mathbb{C}\cdot I$の全体)などであろう。

そこで本小文では、これらの場合について、順次その余近似子を考察してみることにしよう。

1. $\mathcal{C}(\mathcal{H})$余近似子

$T \in B(\mathcal{H})$がcompact作用素であれば、Tの$\mathcal{C}(\mathcal{H})$余近似子はT自身しか存在しないから、Tがcompact作用素でないときだけが問題となる。

定理1. 非compact作用素$T(\in B(\mathcal{H}))$の$\mathcal{C}(\mathcal{H})$余近似子は存在しない。

$\mathfrak{C}(\mathcal{H})$近似子については($\mathfrak{C}(\mathcal{H})$がB($\mathcal{H}$)のM-idealであることから)Tの$\mathfrak{C}(\mathcal{H})$近似子は必ず(それも一般にはかなり豊富に)存在する訳であるから、この結果はやや意外なものかも知れない。

証明は現在のところ、以下のようにやや煩雑な背理法を必要とする。(C^*凸包に関する或る私的な予想が正しければもう少しすっきりできるが、その確証は難しそうである。)

略証. もし或る非compact作用素Tで$\mathfrak{C}(\mathcal{H})$余近似子を持つものが存在したとすれば、Tの極分解を用いて$\mathfrak{C}(\mathcal{H})$余近似子Lを持つような非compact $A \geq 0$であるものが作れる。 ここで$\|A\| = 1$と仮定してよい。 次にAにWeyl-von Neumann定理を適用して、$\dim \ker (A-1) = \infty$を満たすように摂動する。 更にLをselfadjointに取り直せることに注意する。 ところがこのとき$\ker(A-1) \subset \mathrm{Ran}\, L$が導け、$L \notin \mathfrak{C}(\mathcal{H})$となり矛盾が出る。

2. $\mathcal{S}$余近似子

この場合には$T \in B(\mathcal{H})$の余近似子は必ず存在し、しかも一意的に定まる。

定理2. $T(\in B(\mathcal{H}))$の$\mathcal{S}$余近似子はその実部$\mathrm{Re}\, T \left(\equiv \frac{T+T^*}{2}\right)$に限る。

略証. Re Tが Tの$\mathcal{S}$余近似子となっていることは、

$\|\mathrm{Re}\,T-S\| \leqq \|(\mathrm{Re}\,T-S)^2+\underset{(T\text{の虚部})}{(\mathrm{Im}\,T)^2}\|^{1/2} \leqq \|T-S\| \quad (S\in\mathcal{S})$ に注意すれば判る。(いわゆるBouldin normの手法である。)

一意性を言うためには別の$\mathcal{S}$余近似子Dに対して、$A\equiv D-\mathrm{Re}\,T\,(\neq 0)$が

$$\|(\mathrm{Re}\,T-S)+A\| \leqq \|(\mathrm{Re}\,T-S)+i\,\mathrm{Im}\,T\| \quad (S\in\mathcal{S}) \text{ —— } (*)$$

を満たすべきことに注意する。 ここでSをうまく取ることで(*)が破れることを見ればよい。 具体的には$\|A\|$か$-\|A\|$がAの固有値になっていることを利用して、それぞれの場合にSを以下の条件を満たすように取れば済む。((*)式から$\|\mathrm{Im}\,T\| \geqq \|A\|$が出ることも用いる。)

(i) $\|A\|$がAの固有値となっている場合

$$\mathrm{Re}\,T-S=\alpha>(\|\mathrm{Im}\,T\|^2-\|A\|^2)/(2\|A\|) \text{ かつ } \alpha:\text{正数}$$

(ii) $-\|A\|$がAの固有値となっている場合

$$\mathrm{Re}\,T-S=-\alpha<-(\|\mathrm{Im}\,T\|^2-\|A\|^2)/(2\|A\|) \text{ かつ } \alpha:\text{正数}$$

3. $\mathbb{C}$余近似子

$\mathcal{C}(\mathcal{H})$, $\mathcal{S}$の場合とも、余り面白い余近似子は出てこなかったが、$\mathbb{C}$余近似子の場合は事情が異なる。 なお、$T\in B(\mathcal{H})$の$\mathbb{C}$近似子が必ず一意的に存在することは、本質的に

J. G. Stampfli, The norm of a derivation, Pacific J. Math., 33 (1970), 737–747.

に有るが、より具体的には、

C. Apostol and L. Zsido, Ideals in W*-algebras and the functions η of A. Brown and C. Pearcy, Rev. Roum. Math. Pure Appl., (8) 18 (1973), 1151–1170.

の1.3 Corollaryとして示されている。(先の講演では言及できなかったため、少し詳しく紹介した。)

すなわち、$\mathbb{C}$に対しては近似子は大変に貧弱と言える。

定理3. $T(\in B(\mathcal{H}))$の$\mathbb{C}$余近似子の全体は、$\overline{W}(T)$に一致する。 ここで$\overline{W}(T)$とはTの数域$W(T)\equiv\{(Tx,x)\ ;\ \|x\|=1\}$の($\mathbb{C}$内での)閉包である。

$\mathbb{C}$余近似子の方は逆に大変豊富なものとなっていると言える。 この定理の証明であるが、実はこれは周知の事実

$\overline{W}(T)=\{\mu\in\mathbb{C}\ ;\ \|\mu-\lambda\|\leqq\|T-\lambda\|\ (\lambda\in\mathbb{C})\}$ の言い換えに過ぎない。

(F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lect. Note Ser., 10 (1973), Cambridge UP. など参照のこと。)

しかしながら、この事実を上の形に言い替えることで、それが数域の新しい拡張の示唆になり得るかも知れない。(残念ながら現在のところ、うまい$B(\mathcal{H})$の部分空間を思いつけないため、数域の新しい拡張と言えるような余近似子の発見はできていない。)

付記. 先の講演で前座に話した内容は事情で略した。

4. 終わりに

ここ十年来、春秋の数学会で講演することは有っても、作用素論などの研究集会からはすっかり遠のき、消息などにも疎くなってしまっていた人間が、今回突然このような形で登板したことについて一言弁明をさせて戴きたいと思う。

これは実は或る第三者のアクシデントが原因となったものである。 恐らくはもう、このような事は起こるべきではないと思うし、在野の立場で有り続けるうちは、従って今後再びこの種の集会からは縁遠い人間となる筈である。

しかしながら、久方振りに出席させて戴いたこの作用素論集会は、全三日間、大変心楽しい刺激に満ち溢れ、それまでの事後処理の倦怠感を吹き飛ばしてくれるものであった。

話の内容も水準も昔とはすっかり様変わりし、多くの見知らぬ方々も育っていて、確かな時の移り行きも眺められた。

中里教授も今回初めて面識を得た方のお一人である。 今回の件でそのような方にいきなり相当の心的負荷が懸かり、さぞかしご苦労な事であったとお察しする。 それを見事に処理され、その上こちらに対し出来得る限りの便宜を図って戴いたことに対し、教授に心からの謝意を捧げる次第である。

最後に、この分野の現水準からはつまらぬ話を少々間延びした筆致で記してしまったが、何卒ご寛如の程お願いしたい。